

ISSN 2518-1467 (Online),
ISSN 1991-3494 (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Ш Ы С Ы

ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

THE BULLETIN

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

1944 ЖЫЛДАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С 1944 ГОДА
PUBLISHED SINCE 1944

2

АЛМАТЫ
АЛМАТЫ
ALMATY

2017

НАУРЫЗ
МАРТ
MARCH

Б а с р е д а к т о р ы

х. ғ. д., проф., ҚР ҰҒА академигі

М. Ж. Жұрынов

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Абиев Р.Ш. проф. (Ресей)
Абишев М.Е. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Аврамов К.В. проф. (Украина)
Аппель Юрген проф. (Германия)
Баймуқанов Д.А. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Байпақов К.М. проф., академик (Қазақстан)
Байтулин И.О. проф., академик (Қазақстан)
Банас Иозеф проф. (Польша)
Берсимбаев Р.И. проф., академик (Қазақстан)
Велихов Е.П. проф., РҒА академигі (Ресей)
Гашимзаде Ф. проф., академик (Әзірбайжан)
Гончарук В.В. проф., академик (Украина)
Давлетов А.Е. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Джрбашян Р.Т. проф., академик (Армения)
Қалимолдаев М.Н. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Лаверов Н.П. проф., академик РАН (Россия)
Лупашку Ф. проф., корр.-мүшесі (Молдова)
Мохд Хасан Селамат проф. (Малайзия)
Мырхалықов Ж.У. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Новак Изабелла проф. (Польша)
Огарь Н.П. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Полещук О.Х. проф. (Ресей)
Поняев А.И. проф. (Ресей)
Сагиян А.С. проф., академик (Армения)
Сатубалдин С.С. проф., академик (Қазақстан)
Таткеева Г.Г. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Умбетаев И. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Хрипунов Г.С. проф. (Украина)
Якубова М.М. проф., академик (Тәжікстан)

«Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясының Хабаршысы».

ISSN 2518-1467 (Online),

ISSN 1991-3494 (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы»РҚБ (Алматы қ.)

Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5551-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 2000 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Г л а в н ы й р е д а к т о р
д. х. н., проф. академик НАН РК
М. Ж. Журинов

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

Абиев Р.Ш. проф. (Россия)
Абишев М.Е. проф., член-корр. (Казахстан)
Аврамов К.В. проф. (Украина)
Апель Юрген проф. (Германия)
Баймуканов Д.А. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Байпаков К.М. проф., академик (Казахстан)
Байтулин И.О. проф., академик (Казахстан)
Банас Иозеф проф. (Польша)
Берсимбаев Р.И. проф., академик (Казахстан)
Велихов Е.П. проф., академик РАН (Россия)
Гашимзаде Ф. проф., академик (Азербайджан)
Гончарук В.В. проф., академик (Украина)
Давлетов А.Е. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Джрбашян Р.Т. проф., академик (Армения)
Калимолдаев М.Н. проф., чл.-корр. (Казахстан), зам. гл. ред.
Лаверов Н.П. проф., академик РАН (Россия)
Лупашку Ф. проф., чл.-корр. (Молдова)
Моход Хасан Селамат проф. (Малайзия)
Мырхалыков Ж.У. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Новак Изабелла проф. (Польша)
Огарь Н.П. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Полещук О.Х. проф. (Россия)
Поняев А.И. проф. (Россия)
Сагьян А.С. проф., академик (Армения)
Сатубалдин С.С. проф., академик (Казахстан)
Таткеева Г.Г. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умбетаев И. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Хрипунов Г.С. проф. (Украина)
Якубова М.М. проф., академик (Таджикистан)

«Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан».

ISSN 2518-1467 (Online),
ISSN 1991-3494 (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5551-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год

Тираж: 2000 экземпляров

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел. 272-13-19, 272-13-18.

www: nauka-nanrk.kz, bulletin-science.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75

E d i t o r i n c h i e f

doctor of chemistry, professor, academician of NAS RK

M. Zh. Zhurinov

E d i t o r i a l b o a r d:

Abiyev R.Sh. prof. (Russia)
Abishev M.Ye. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Avramov K.V. prof. (Ukraine)
Appel Jurgen, prof. (Germany)
Baimukanov D.A. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Baipakov K.M. prof., academician (Kazakhstan)
Baitullin I.O. prof., academician (Kazakhstan)
Joseph Banas, prof. (Poland)
Bersimbayev R.I. prof., academician (Kazakhstan)
Velikhov Ye.P. prof., academician of RAS (Russia)
Gashimzade F. prof., academician (Azerbaijan)
Goncharuk V.V. prof., academician (Ukraine)
Davletov A.Ye. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Dzhrbashian R.T. prof., academician (Armenia)
Kalimoldayev M.N. prof., corr. member. (Kazakhstan), deputy editor in chief
Laverov N.P. prof., academician of RAS (Russia)
Lupashku F. prof., corr. member. (Moldova)
Mohd Hassan Selamat, prof. (Malaysia)
Myrkhalykov Zh.U. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Nowak Isabella, prof. (Poland)
Ogar N.P. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Poleshchuk O.Kh. prof. (Russia)
Ponyaev A.I. prof. (Russia)
Sagiyani A.S. prof., academician (Armenia)
Satubaldin S.S. prof., academician (Kazakhstan)
Tatkeyeva G.G. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umbetayev I. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Khripunov G.S. prof. (Ukraine)
Yakubova M.M. prof., academician (Tadjikistan)

Bulletin of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

ISSN 2518-1467 (Online),

ISSN 1991-3494 (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of Information and Archives of the Ministry of Culture and Information of the Republic of Kazakhstan N 5551-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 2000 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
<http://nauka-nanrk.kz/>, <http://bulletin-science.kz>

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

M. D. Shinibaev¹, A. A. Bekov¹, B. N. Rahimganov¹, S. B. Mominov¹,
A. G. Sadybek², B. T. Alimkulova³, K. Abdrahmanov³

¹National center of space researches and technologies, Almaty, Kazakhstan,

²University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan,

³South-Kazakhstan state pedagogical institute, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

ON THE EXISTENCE OF TWO CLASSES OF CIRCULAR ORBITS OF THE TEST BODY IN HILL VARIABLES

Abstract. The work [1, p. 119] of B.M. Schigolev investigated the second plane problem of Hill. For it, Hill proposed a scheme of the power function

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}vr^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad v > 0, \quad \mu = f(m_0 + m),$$

where m_0 – central body mass, m – test body mass, f – the gravitational constant.

The structure of the force function is motivated by the fact that the motion of the pericenter (and the node in the spatial problem) is taken into account in the plane problem.

B. M. Schigolev avoiding the well known idea of circular orbits in the Hill second task, using his original method, has found [1, p. 98] following existence and evolution of circular orbits of the test body:

1. When $\alpha < 0,10546875$ there are two circular orbits.
2. These orbits are merged into one at $\alpha = 0,10546875$.
3. They disappear when $\alpha > 0,10546875$.

In this paper we prove the validity of these conclusions and in the case of the Hill plane problem. The existence of two classes of circular orbits in Hill variables is determined. The boundaries of these classes have been found as in Hill variables so in present variables. It was found laws valid both in flat and in case of a small inclination of the orbit to the main plane.

Key words: test body, of circular orbits, the Hill variables, class of orbits, Hill gravitational field, Earth satellite.

The differential equations of the orbital motion of the test body in the Hill variables have the form [1, p. 93]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2w}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right)w - \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} &= 0, \\ \frac{d^2s}{d\vartheta^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right)s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where the variables w , s and Hill constants α , β – dimensionless, ϑ – the true length of the test body. They are defined by formulas

$$w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad s = \operatorname{tg} \varphi, \quad \alpha = \frac{vC^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(v-v')C^6}{\mu^4}, \quad (2)$$

where C – area integral constant, $\rho^2 = x^2 + y^2$ – the projection of the radius-vector of the test body onto the Oxy plane, s – latitude tangent, φ – latitude of the test body, v and v' – Parameters chosen so that there will be actual observed motions of the pericenter and the node of the orbit.

True longitude and time are related to each other by the differential equation

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}. \quad (3)$$

Expanding $\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}$ in a binomial series in powers of s , we can see that (1) describes the motion of the test body quite adequate at $0 \leq \varphi \leq 10^0$.

The first-approximation equations at $s \neq 0$, $s^2 \approx 0$ have the form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\nu^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right) w - 1 &= 0, \\ \frac{d^2 s}{d\nu^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right) s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

The first equation from (4) at $w = R = \text{const}$ transforms into the equation of circular orbits

$$w^4 - w^3 + \alpha = 0, \quad (5)$$

because $\frac{d^2 w}{d\nu^2} = 0$ and $w \neq 0$.

The same equation from (4) allows a decrease in the order [1, c. 99]:

$$d\vartheta = \frac{w dw}{\sqrt{\alpha + Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \quad (6)$$

where $H = \frac{2hC^2}{\mu^2}$, h – energy integral constant.

In the case of the circular motion type $\alpha > 0$, $H < 0$, $e = 0$, therefore (6) will have the form [2, p. 79]:

$$d\vartheta = \frac{w dw}{\sqrt{\alpha - Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \quad (7)$$

e – eccentricity of the orbit.

Polynomial

$$P(w) = -w^4 + 2w^3 - Hw^2 + \alpha$$

has three positive roots $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and one negative root α_4 , and let it be

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4.$$

The actual motions correspond to positive values of the polynomial, $P(w)$, which are realized on two intervals [2, p. 79]:

$$\text{A) } \alpha_4 < w < \alpha_3; \quad \text{B) } \alpha_2 < w < \alpha_1.$$

Let us consider the second interval $\alpha_2 < w < \alpha_1$. After the transition to the Legendre normal form, we have [2, p. 82]:

$$d\vartheta = \mu_0 \frac{w d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

where

$$w = \frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \psi}, \quad (9)$$

$$k^2 = \frac{\alpha_{43} \alpha_{21}}{\alpha_{31} \alpha_{42}}, \quad \mu_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31} \alpha_{42}}}, \quad 0 < k < 1, \quad \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i \quad (k, i = 1, 2, 3, 4).$$

The first circular orbit is apparently realized when $\psi = 0$, here from (8) and (9) we have

$$R_1 = w_1 = \alpha_2. \tag{10}$$

The second circular orbit is apparently realized when $\psi = \frac{\pi}{2}$, here from (8) and (9) we have

$$R_2 = w_2 = \alpha_1.$$

Except that $R_2 > R_1$. On the Oxy plane they are arranged concentrically.

On the interval $\alpha_4 < w < \alpha_3$ similarly we have two more circular orbits

$$R_3 = w_3 = \alpha_4 \text{ at } \psi = 0 \text{ and } R_4 = w_4 = \alpha_3 \text{ at } \psi = \frac{\pi}{2}.$$

By combining the center of the circles with the center mass of the central body, we have 4 circular concentric orbits (Figure 1). Radii of circular orbits as rising ψ from 0 to $\frac{\pi}{2}$, increase from R_3 to R_4 and from R_1 to R_2 . There is no actual motion between the roots (α_3, α_2) , as there is the polynomial $P(w) < 0$. It should be noted that the actual motions of the test body exist on the intervals (α_2, α_1) and (α_4, α_3) , as they have $P(w) > 0$.

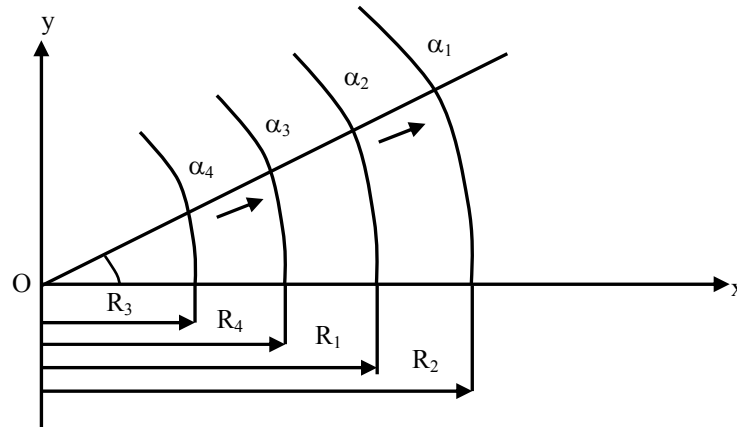


Figure 1 – The boundaries of circular orbits in Hill variables

Evolution of circular orbits on the segment $[\alpha_2, \alpha_1]$ can be traced by the equation [2, p. 82]

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4) \cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi, \tag{11}$$

where

$$w_{00} = \alpha_2, \quad w_{02} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{31}} + \frac{3}{8} \frac{\alpha_{42}^2\alpha_{32}}{\alpha_{43}}, \quad w_{12} = -\frac{\alpha_{42}\alpha_{32}}{2\alpha_{43}}, \quad w_{14} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{42}^2}{2\alpha_{43}^2}, \quad w_{24} = -\frac{1}{4}w_{14}.$$

It follows from (11) that, as ψ increases from 0 to $\frac{\pi}{2}$ the radii of circular orbits grow continuously from R_1 to R_2 . Between them there is a whole class of circular orbits. Let us call them the I-class of circular orbits. Evolution of circular orbits on the segment $[\alpha_4, \alpha_3]$ can be traced by the equation [2, p. 80]:

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4) \cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi, \tag{12}$$

where

$$w_{00} = \alpha_3, \quad w_{02} = -\frac{\alpha_{31}^2\alpha_{42}}{2\alpha_{41}\alpha_{21}}, \quad w_{12} = w_{02}, \quad w_{14} = -\frac{1}{2}\alpha_{31}^2 \left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2, \quad w_{24} = -\frac{1}{8}\alpha_{31}^2 \left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2.$$

The (12) series stops at k^4 with an error in order $O(k^5)$. With growth of ψ from 0 to $\frac{\pi}{2}$ the radii of circular orbits grow continuously from R_3 to R_4 . Here there is a class of circular orbits. We call them the II-class of circular orbits.

Taking into account that w is given by formulas on intervals [2, p. 80-82]

$$\alpha_2 \leq w \leq \alpha_1, \quad w = \frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \psi}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

$$\alpha_4 \leq w \leq \alpha_3, \quad w = \frac{\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \psi}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

let us check the boundaries of the circular orbits of the I and II classes.

We consider the boundaries of circular orbits of the I class:

at $\psi = 0$ from (13) we have

$$R_1 = w_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_2, \quad (15)$$

at $\psi = \frac{\pi}{2}$ we have

$$R_2 = w_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) - \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1(-\alpha_3 + \alpha_2)}{(-\alpha_3 + \alpha_2)} = \alpha_1. \quad (16)$$

The lower boundary α_2 , the upper α_1 , as $\alpha_1 > \alpha_2$.

We consider the boundaries of circular orbits of the II class:

from (14) with $\psi = 0$ we get

$$R_3 = w_3 = \frac{\alpha_4 \alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_4, \quad (17)$$

at $\psi = \frac{\pi}{2}$ we have

$$R_4 = w_4 = \frac{\alpha_4(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_4} = \frac{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_4} = \alpha_3. \quad (18)$$

The lower boundary α_4 , the upper α_3 , as $|\alpha_4| < \alpha_3$.

According to (16) the I class of circular orbits originates from α_2 and ends with the value α_1 , merging into one orbit of the radius $R_2 = \alpha_1$.

According to (17) and (18) The II class of circular orbits starts from the orbit of the radius $R_3 = \alpha_4$ merging into one orbit of the radius $R_4 = \alpha_3$.

Thus, we consider the availability of 2 classes of circular orbits that are not related to each other as authentic.

As in the case of the I class, so in the case of the II class, the radii of circular orbits continuously grow and merge into one orbit, the radius of which is the largest in each of the classes.

From circular orbits in Hill variables $w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}$ we proceed to actual circular orbits $\rho = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{w}$,

then the boundaries of the orbits of the I class have the form:

$$\rho_2 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_1}, \quad \rho_1 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad \rho_1 > \rho_2,$$

with ρ_1 – the upper boundary, ρ_2 – the lower boundary of this class of circular orbits (figure 2).

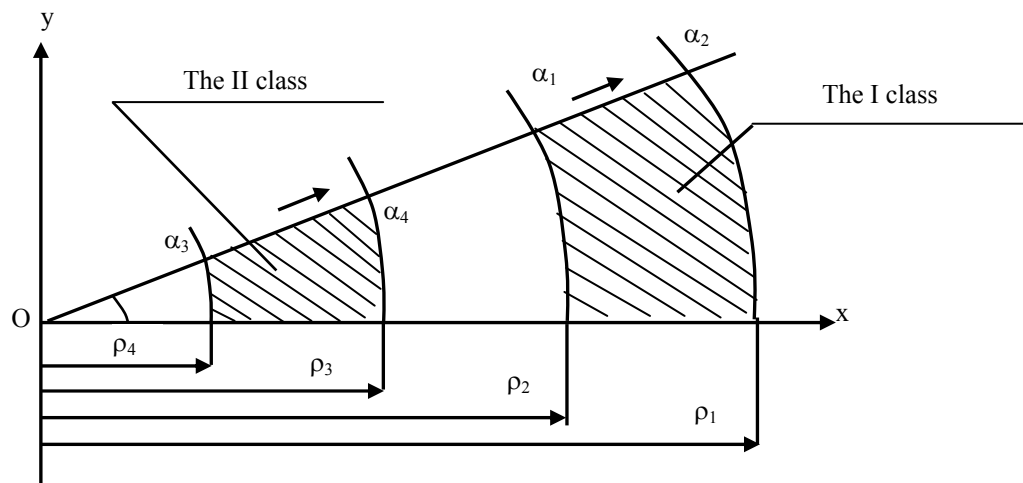


Figure 2 – The boundaries of actual circular orbits

The I class of actual circular orbits begins with ρ_2 and merge into one orbit of the radius ρ_1 .
For actual circular orbits of the II class we have:

$$\rho_3 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_4}, \quad \rho_4 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 > |\alpha_4|, \quad \rho_3 > \rho_4,$$

ρ_3 – the upper boundary, a ρ_4 – the lower boundary of this class.

Thus, The II class of actual circular orbits begins with ρ_4 , merge into one orbit of the radius ρ_3 .

As ψ rises up to $\frac{\pi}{2}$ the radii of the orbits of the I class grow continuously from ρ_2 to ρ_1 , similarly, the radii of the orbits of the II class increase from ρ_4 to ρ_3 .

REFERENCES

- [1] Schigolev B.M. O promejutochnoj orbite Hilla v Zadache treh tel // Trudy GAISH. M.: MGU im. M. V. Lomonosova, 1960. Vol. 20. P. 91-119 (in Russ).
[2] Shinibaev M.D. Postupatelnye dvigenij passivno gravitiruyoushego tela v centralnom i necentralnom pole taygotenia. Almaty: RIO VAK RK, 2001. 128 p. (in Russ).

М. Д. Шинибаев¹, А. А. Беков¹, Б. Н. Рахимжанов¹, С. Б. Моминов¹,
А. Ж. Садыбек², Б. Т. Алимкулова³, К. Абдрахманов³

¹Национальный центр космических исследований и технологий, Алматы, Казахстан,

²Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан,

³Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДВУХ КЛАССОВ КРУГОВЫХ ОРБИТ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ХИЛЛА

Аннотация. В работе [1, с.119] Б.М. Щиголев исследовал плоскую вторую задачу Хилла. Для нее Хилл предложил схему силовой функции:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}vr^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad v > 0, \quad \mu = f(m_0 + m),$$

где m_0 – масса центрального тела, m – масса пробного тела, f – постоянная тяготения.

Структура силовой функции мотивируется тем, что в плоской задаче учитывается движение перицентра (и узла в пространственной задаче).

Б. М. Щиголев, минуя общеизвестные представления о круговых орбитах во второй задаче Хилла, используя свой оригинальный способ, нашел [1, с. 98] следующие закономерности существования и эволюции круговых орбит пробного тела:

1. При $\alpha < 0,10546875$ существуют две круговые орбиты.
2. Эти орбиты сливаются в одну при $\alpha = 0,10546875$.
3. Они исчезают при $\alpha > 0,10546875$.

В данной статье показана справедливость этих выводов и в случае возмущенной плоской задачи Хилла. Установлено существование двух классов круговых орбит в переменных Хилла. Найдены границы этих классов, как в переменных Хилла, так и в действительных переменных. Найденные закономерности справедливы как в плоской задаче, так и в случае малого наклона орбиты к основной плоскости.

Ключевые слова: пробное тело, круговые орбиты, переменные Хилла, класс орбит, поле тяготения Хилла, спутник Земли.

Дифференциальные уравнения орбитального движения пробного тела в переменных Хилла имеют вид [1, с. 93]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2w}{dv^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right)w - \frac{1}{(1+s^2)^{3/2}} &= 0, \\ \frac{d^2s}{dv^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right)s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где переменные w , s и постоянные Хилла α , β – величины безразмерные, ϑ – истинная долгота пробного тела. Они определены формулами

$$w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad s = \operatorname{tg} \varphi, \quad \alpha = \frac{vC^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(v-v')C^6}{\mu^4}, \quad (2)$$

где C – постоянная интеграла площадей, $\rho^2 = x^2 + y^2$ – проекция радиуса-вектора пробного тела на плоскость Oxy , s – тангенс широты, φ – широта пробного тела, v и v' – параметры, подбираемые так, чтобы получались действительные наблюдаемые движения перицентра и узла орбиты.

Истинная долгота и время связаны между собой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{\rho^2}. \quad (3)$$

Разложив $\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}$ в биномиальный ряд по степеням s , можно убедиться в том, что (1)

описывает движение пробного тела вполне адекватно при $0 \leq \varphi \leq 10^0$.

Уравнения первого приближения при $s \neq 0$, $s^2 \approx 0$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 w}{d\nu^2} + \left(1 + \frac{\alpha}{w^4}\right) w - 1 &= 0, \\ \frac{d^2 s}{d\nu^2} + \left(1 + \frac{\beta}{w^4}\right) s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Первое уравнение из (4) при $w = R = \text{const}$ трансформируется в уравнение круговых орбит

$$w^4 - w^3 + \alpha = 0, \quad (5)$$

так как $\frac{d^2 w}{d\nu^2} = 0$ и $w \neq 0$.

Это же уравнение из (4) допускает понижение порядка [1, с. 99]:

$$d\vartheta = \frac{w dw}{\sqrt{\alpha + Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \quad (6)$$

где $H = \frac{2hC^2}{\mu^2}$, h – постоянная интеграла энергии.

В случае кругового типа движения $\alpha > 0$, $H < 0$, $e = 0$, поэтому (6) будет иметь вид [2, с. 79]:

$$d\vartheta = \frac{w dw}{\sqrt{\alpha - Hw^2 + 2w^3 - w^4}}, \quad (7)$$

e – эксцентриситет орбиты.

Полином

$$P(w) = -w^4 + 2w^3 - Hw^2 + \alpha$$

имеет три положительных корня $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и один отрицательный корень α_4 и пусть

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4.$$

Действительным движениям соответствуют положительные значения полинома $P(w)$, которые реализуются на двух интервалах [2, с. 79]:

$$\text{А) } \alpha_4 < w < \alpha_3; \quad \text{Б) } \alpha_2 < w < \alpha_1.$$

Рассмотрим второй интервал $\alpha_2 < w < \alpha_1$. После перехода к нормальной форме Лежандра имеем [2, с. 82]:

$$d\vartheta = \mu_0 \frac{w d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

где

$$w = \frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \psi}, \quad (9)$$

$$k^2 = \frac{\alpha_{43} \alpha_{21}}{\alpha_{31} \alpha_{42}}, \quad \mu_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31} \alpha_{42}}}, \quad 0 < k < 1, \quad \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i \quad (k, i = 1, 2, 3, 4).$$

Первая круговая орбита видимо реализуется при $\psi = 0$, здесь из (8) и (9) имеем

$$R_1 = w_1 = \alpha_2. \quad (10)$$

Вторая круговая орбита, видимо, реализуется при $\psi = \frac{\pi}{2}$, здесь из (8) и (9) имеем

$$R_2 = w_2 = \alpha_1.$$

причем $R_2 > R_1$. На плоскости Oxy они располагаются концентрически.

На интервале $\alpha_4 < w < \alpha_3$, видимо, аналогично имеем еще две круговые орбиты

$$R_3 = w_3 = \alpha_4 \text{ при } \psi = 0 \text{ и } R_4 = w_4 = \alpha_3 \text{ при } \psi = \frac{\pi}{2}.$$

Совмещая центр окружностей с центром масс центрального тела, имеем 4 круговые концентрические орбиты (рисунок 1). Радиусы круговых орбит по мере роста ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$, растут от R_3 до R_4 и от R_1 до R_2 . Действительных движений между корнями (α_3, α_2) нет, так как здесь полином $P(w) < 0$. Следует отметить, что действительные движения пробного тела существуют на интервалах (α_2, α_1) и (α_4, α_3) , так как в них $P(w) > 0$.

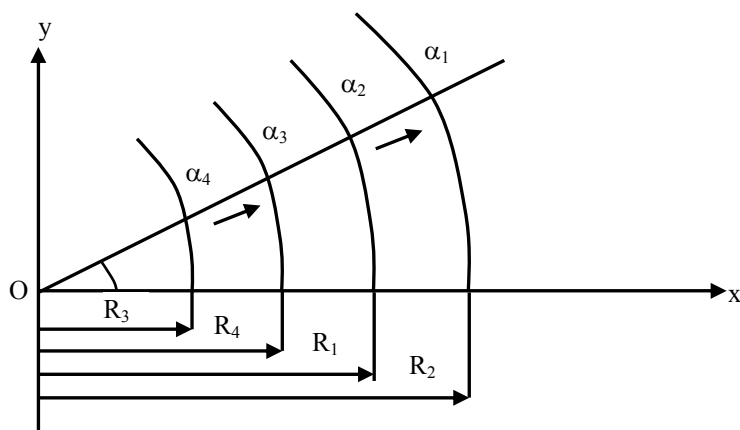


Рисунок 1 – Границы круговых орбит в переменных Хилла

Эволюцию круговых орбит на отрезке $[\alpha_2, \alpha_1]$ можно проследить по уравнению [2, с. 82]

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4) \cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi, \quad (11)$$

где

$$w_{00} = \alpha_2, \quad w_{02} = \frac{\alpha_{21}\alpha_{32}}{\alpha_{31}} + \frac{3}{8} \frac{\alpha_{42}^2\alpha_{32}}{\alpha_{43}}, \quad w_{12} = -\frac{\alpha_{42}\alpha_{32}}{2\alpha_{43}}, \quad w_{14} = -\frac{\alpha_{32}\alpha_{42}^2}{2\alpha_{43}^2}, \quad w_{24} = -\frac{1}{4}w_{14}.$$

Из (11) также следует, что по мере роста ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиусы круговых орбит растут непрерывно от R_1 до R_2 . Между ними существует целый класс круговых орбит. Назовем их I-классом круговых орбит. Эволюцию круговых орбит на отрезке $[\alpha_4, \alpha_3]$ можно проследить по уравнению [2, с. 80]:

$$w = (w_{00} + w_{02}k^2) + (w_{12}k^2 + w_{14}k^4) \cos 2\psi + w_{24}k^4 \cos 4\psi, \quad (12)$$

где

$$w_{00} = \alpha_3, \quad w_{02} = -\frac{\alpha_{31}^2\alpha_{42}}{2\alpha_{41}\alpha_{21}}, \quad w_{12} = w_{02}, \quad w_{14} = -\frac{1}{2}\alpha_{31}^2 \left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2, \quad w_{24} = -\frac{1}{8}\alpha_{31}^2 \left(\frac{\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2.$$

Ряд (12) обрывается на k^4 с ошибкой порядка $O(k^5)$. С ростом ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ радиусы круговых орбит растут непрерывно от R_3 до R_4 . Здесь существует класс круговых орбит. Назовем их II-классом круговых орбит.

Учитывая, что w на интервалах задана формулами [2, с. 80-82]

$$\alpha_2 \leq w \leq \alpha_1, \quad w = \frac{\alpha_2 \alpha_{31} - \alpha_3 \alpha_{21} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} - \alpha_{21} \sin^2 \psi}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (13)$$

$$\alpha_4 \leq w \leq \alpha_3, \quad w = \frac{\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43} \sin^2 \psi}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \psi}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

проверим границы круговых орбит I-го и II-го классов.

Рассмотрим границы круговых орбит I-го класса:

при $\psi = 0$ из (13) получим

$$R_1 = w_1 = \frac{\alpha_2 \alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_2, \quad (15)$$

при $\psi = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$R_2 = w_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) - \alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1(-\alpha_3 + \alpha_2)}{(-\alpha_3 + \alpha_2)} = \alpha_1. \quad (16)$$

Нижняя граница α_2 , верхняя α_1 , так как $\alpha_1 > \alpha_2$.

Рассмотрим границы орбит II-го класса:

из (14) при $\psi = 0$ получим

$$R_3 = w_3 = \frac{\alpha_4 \alpha_{31}}{\alpha_{31}} = \alpha_4, \quad (17)$$

при $\psi = \frac{\pi}{2}$ имеем

$$R_4 = w_4 = \frac{\alpha_4(\alpha_1 - \alpha_3) + \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_4} = \frac{\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_4} = \alpha_3. \quad (18)$$

Нижняя граница α_4 , верхняя α_3 , так как $|\alpha_4| < \alpha_3$.

В соответствии с (16) I-й класс круговых орбит берет начало с α_2 и заканчивается на значении α_1 , сливаясь в одну орбиту радиуса $R_2 = \alpha_1$.

В соответствии с (17) и (18) II-ой класс круговых орбит начало берет с орбиты радиуса $R_3 = \alpha_4$ и сливаются в одну орбиту радиуса $R_4 = \alpha_3$.

Таким образом, считаем достоверным наличие 2-х классов круговых орбит, которые не связаны между собой.

Как в случае I-го класса, так и в случае II-го класса радиусы круговых орбит непрерывно растут и сливаются в одну орбиту, радиус которого наибольший в каждом из классов.

От круговых орбит в переменных Хилла $w = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}$ перейдем к действительным круговым

орбитам $\rho = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{w}$, тогда границы орбит I-го класса имеют вид:

$$\rho_2 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_1}, \quad \rho_1 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_2}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \quad \rho_1 > \rho_2,$$

причем ρ_1 – верхняя граница, ρ_2 – нижняя граница этого класса круговых орбит (рисунок 2).

I-й класс действительных круговых орбит начинается с ρ_2 и сливаются в одну орбиту радиуса ρ_1 .

Для действительных круговых орбит II-го класса имеем:

$$\rho_3 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_4}, \quad \rho_4 = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\alpha_3}, \quad \alpha_3 > |\alpha_4|, \quad \rho_3 > \rho_4,$$

ρ_3 – верхняя, а ρ_4 – нижняя граница этого класса.

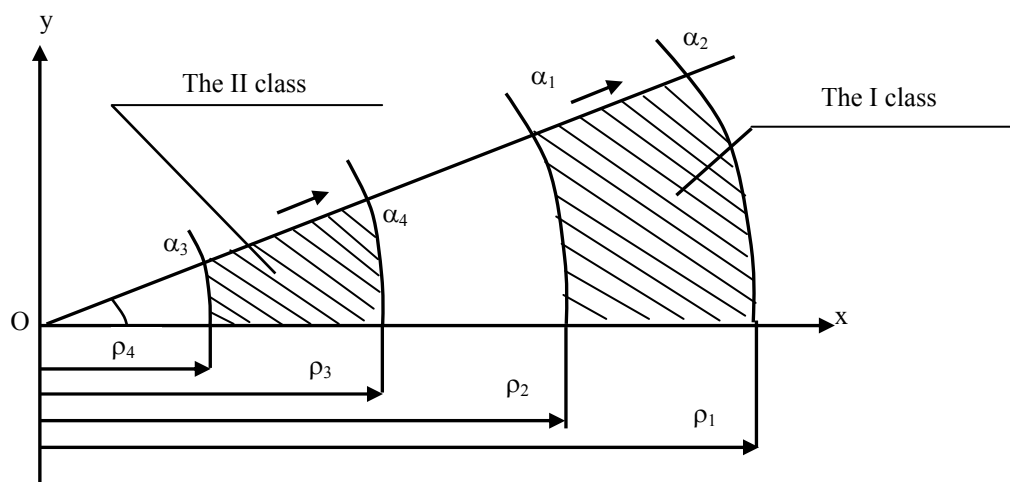


Рисунок 2 – Границы действительных круговых орбит

Таким образом, II-ой класс действительных круговых орбит начинается с ρ_4 сливаются в одну орбиту радиуса ρ_3 .

По мере роста ψ от до $\frac{\pi}{2}$ радиусы орбит I-го класса растут непрерывно от ρ_2 до ρ_1 , аналогично радиусы орбит II-го класса растут от ρ_4 до ρ_3 .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Щиголов Б.М. О промежуточной орбите Хилла в задаче трех тел // Труды ГАИШ. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1960. – Т. 20. – С. 91-119.
 [2] Шинибаев М.Д. Поступательные движения пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентрально поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.

М. Д. Шыныбаев¹, А. А. Беков¹, Б. Н. Рахимжанов¹, С. Б. Моминов¹,
 А. Ж. Сәдібек², Б. Т. Алимқұлова³, Қ. Абдрахманов³

¹«Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы», Алматы, Қазақстан;

²Сыр-Дария университеті, Жетysай, Қазақстан;

³Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан

ХИЛЛ АЙНЫМАЛЫЛАРЫНДА СЫНАҚ ДЕНЕСІНІҢ ЕКІ ШЕҢБЕРЛІК ОРБИТАЛАР ҮЙІРІ БАР БОЛУЫ

Аннотация. Б.М. Щиголов жазықтықтағы Хиллдың екінші есебін зерттеді [1, б.119]. Бұл есепте Хилл күш функциясы мына түрде берді

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}vr^2, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad v > 0, \quad \mu = f(m_0 + m),$$

мұнда m_0 – орталық дененің массасы, m – сынақ денесінің массасы, f – тартылыс тұрақтысы.

Күш функциясының құрамы перицентр қозғалысын (және кеңістікте түйін қозғалысын) есепке алатын етіп алынған.

Б.М. Щиголов [1, б.98] өзінің жеке әдісін қолданып шеңберлік орбиталар туралы өте құнды мәліметтер алды:

1. $\alpha < 0,10546875$ болғанда екі шеңберлі орбиталар бар.
2. Олар жалғыз орбита $\alpha = 0,10546875$ болғанда айналады.
3. $\alpha > 0,10546875$ болғанда орбита жойылады.

Мақалада бұл мәліметтер орындалатындығы және шеңберлік орбиталардың бір-бірімен байланыссыз екі үйірі бар екені айтылды. Ол үйірлердің шектері табылды.

Түйін сөздер: сынақ денесі, шеңберлік орбита, Хилл айнымалылары, орбита үйірі, Хилл өрісі, Жердің жасанды серігі.

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

www.nauka-nanrk.kz

ISSN 2518-1467 (Online), ISSN 1991-3494 (Print)

<http://www.bulletin-science.kz/index.php/ru/>

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. М. Апендиев*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 13.04.2017.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

19,2 п.л. Тираж 2000. Заказ 2.